Reimund Albers, Arithmetik als Prozess, WiSe 05/06
Übung 7, Lösungsskizzen

1 a) $b=6$ Dann ist $b+1=7$. Also gilt die alternierende QS-Regel $3-2+4-5=0$ Also ist 5423_6 durch 7 teilbar

$b=7$ 5423_7 ist nicht durch 7 teilbar, da die letzte Ziffer nicht 0 ist

$b=8$ $7=b-1$ Also gilt die QS-Regel

Quersumme $5+4+2+3=14$ Also ist 5423_8 durch 7 teilbar

$b=10$ keine der speziellen Regeln gelten. TR: nicht teilbar

$b=13$ $7 \mid 14=b+1$ Also alternierende QS-Regel

(s.o $b=6$) 5423_{13} ist durch 7 teilbar

$5423_{13} = 11690_{10} = 1670 \cdot 7_{10}$

$b=14$ Letzte Ziffer-Regel, da $7 \mid 14=b$

5423_{14} ist <u>nicht</u> durch 7 teilbar

$b=15$ $7 \mid 14=b-1$ Also QS-Regel (siehe $b=8$)

5423_{15} ist durch 7 teilbar

$5423_{15} = 17808_{10} = 2544 \cdot 7$

b) QS-Regel Quersumme von 2134_b ist 10_{10} 10_{10} ist nicht durch 7 teilbar

alternierende QS-Regel: $4-3+1-2=0$

folglich ist 2134_b in allen Basissystemen durch 7 teilbar, in denen $7 \mid b+1 \Leftrightarrow k \cdot 7 = b+1,\ k \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow b = k \cdot 7 - 1$ Also $b = 6, 13, 20, 27, \ldots$

Probe: $2134_6 = 490_{10} = 7 \cdot 70_{10}$ $2134_{20} = 16464_{10} = 7 \cdot 2352$

$2134_{13} = 4606_{10} = 7 \cdot 658_{10}$

Letzte Ziffer-Regel: 4 ist nicht durch 7 teilbar

$\rightarrow$ keine Basis b als Lösung

Letzten beiden Ziffern-Regel: $7 \mid 3b+4 \Leftrightarrow k \cdot 7 = 3b+4, k \in \mathbb{N}$

Lösungen: $b=1, k=1$ (keine sinnvolle Lösung)

$b=8, k=4$ aber $7 \nmid b^2 (=64)$

$b=15, k=7$ aber $7 \nmid b^2 (=225)$

allgemein $b \equiv 1 \mod 7 \Rightarrow b^2 \equiv 1 \mod 7$

$\Rightarrow 7 \nmid b^2$

Also gibt es kein b, das die „letzten beiden Ziffern-Regel" für 7 erfüllt.

Damit sind $b = 6, 13, 20, 27, \ldots$ nach den hier betrachteten Teilbarkeitsregeln die Lösungen. Es ist nicht auszuschließen, dass es noch weitere Lösungen außerhalb dieser Regeln gibt.

c) $b=12$ Teilbarkeit durch 7: keine einfache Regel

Ansatz: $2 \cdot 12^4 + x \cdot 12^3 + 2 \cdot 12^2 + 1 \cdot 12 + 2 = k \cdot 7$

$1728\,x + 41774 = k \cdot 7$

modulo 7: $\underset{(-1)}{\cancel{6}}\,x + 5 \equiv 0 \mod 7$

$\Rightarrow x = 5$ ist Lösung

$b = 13 \Rightarrow 7 \mid b+1$ Also alternierende QS-Regel

altern. QS: $2+2+2-(1+x) = 5-x$

ergibt ein durch 7 teilbares Ergebnis für $x=5$

Probe: $25212_{13} = 68460_{10} = 7 \cdot 9780$

$b=14$ $7 \mid b$ Also letzte Ziffer-Regel

Die letzte Ziffer ist 2 und $7 \nmid 2$, unabhängig von x

$\Rightarrow$ keine Lösung für x

$b = 15 \Rightarrow 7 \mid b-1$ Also QS-Regel

Quersumme: $2 + x + 2 + 1 + 2 = 7 + x$ ist durch 7

teilbar für $x = 0$ oder $x = 7$ oder $x = E$

Probe: $20212_{15} = 101717_{10} = 7 \cdot 14531_{10}$

$b = 16$ Keine spezielle Regel

$2 \cdot 16^4 + x \cdot 16^3 + 2 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16 + 2 = 4096x + 131602$

modulo 7 : $1 \cdot x + 2 \equiv 0 \mod 7$ $\quad x = 5 \quad x = 12_{10} = C_{16}$

HAUSÜBUNGEN

2)

Zahl	Teiler	Regel		Ergebnis
5041_6	$5_{10} = 5_6$	Quersumme	$5 \mid 10$	teilbar
$4A65_{12}$	$13_{10} = 11_{12}$	altern. QS	$15 - 10 = 5_{10}$	nicht teilbar
$6B47_{15}$	$3_{10} = 3_{15}$	letzte Ziffer	$3 \nmid 7$	nicht teilbar
$284C_{15}$	$7_{10} = 7_{15}$	Quersumme	$7 \nmid 26_{10}$	nicht teilbar
4251_6	$9_{10} = 13_6$	Letzten 2 Ziffern	$9 \nmid 31_{10}$	nicht teilbar
$2A04_{11}$	$4_{10} = 4_{11}$	altern. QS	$14 - 2 = 12 \quad 4 \mid 12$	teilbar

3 a) $a \mid b \Leftrightarrow b = k_1 a,\ k_1 \in \mathbb{N}$ Def der Teilerrelation

$\Leftrightarrow bd = k_1 ad$ Multiplikation mit d

$\Leftrightarrow ad \mid bd$ da bd Vielfaches von ad ist

b) $a \mid b \Rightarrow b = k_1 a,\ k_1 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow b^2 = k_1^2 a^2$ beide Seiten quadrieren

$\Rightarrow a^2 \mid b^2$ da b^2 Vielfaches von a^2

c) Die Umkehrung $a^2 \mid b^2 \Rightarrow a \mid b$ ist richtig.

Beweis: Es sei $a = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von a.

Dann gilt für jeden Primfaktor p_i von a:

$p_i^{n_i} \mid a \Rightarrow p_i^{2n_i} \mid a^2 \underset{\text{Voraus.}}{\Rightarrow} p_i^{2n_i} \mid b^2$

$\Rightarrow p_i^{n_i} \mid b$, da p_i Primzahl

Wenn jeder der Primzahlpotenzen von a Teiler von b ist, so muss a insgesamt Teiler von b sein.

d) a muss eine zusammengesetzte Zahl sein, z.B $a = 6 = 2 \cdot 3$. Einer der Faktoren ist Teiler von b, der andere Teiler von c. Z.B $b = 4$ $c = 9$
Dann ist 6 Teiler von $4 \cdot 9 = 36$, aber $6 \nmid 4$ und $6 \nmid 9$. Anderes Beispiel: $a = 24$ $b = 20$ $c = 30$
$24 \mid 600$ aber $24 \nmid 20$ und $24 \nmid 30$

4 a)

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

b)
```
53 · 24
 150
  340
 2240
```

```
2152 : 4 = 325
20
 15
 12
  32
  32
   0
```

c) Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die letzte Stelle durch 2 teilbar ist

- durch 3 teilbar, wenn die letzte Stelle durch 3 teilbar ist
- durch 4 teilbar, wenn die durch die letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
- durch 5 teilbar, wenn die Quersumme durch 5 teilbar ist.
- durch 10 teilbar, wenn die letzte Ziffer 0 ist
- durch 11 teilbar, wenn die alternierende QS durch 11 teilbar ist.

- Eine Zahl ist durch 13 teilbar, wenn die ~~Zahl~~ durch die letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 13 teilbar ist. Das ist konkret 00, 13, 30, 43
- Eine Zahl ist durch 20 teilbar, wenn sie durch 3 und 4 teilbar ist.

  oder: wenn die letzten beiden Ziffern 00, 20 oder 40 sind

d) Die gesuchte Zahl hat die Darstellung $21abc$

Wegen der Teilbarkeit durch 10 folgt $c=0$

Damit ist die Teilbarkeit durch 2 und 3 gesichert.

Teilbarkeit durch 4 $\Rightarrow$ $(bc)=(00)$ oder (20) oder (40)

also $b=0$ od. 2 od. 4

Teilbarkeit durch 5: QS $2+1+a+b = a+b+3$

Teilbarkeit durch 11: altern. QS $2-1+a-b = a-b+1$

Ansatz: $a-b+1=0$ und $a+b+3=5$

$\Leftrightarrow$ $a-b=-1$ und $a+b=2$

ist für gerades b nicht erfüllbar

also neuer Ansatz: $a-b=-1$ und $a+b=7_{10}$

probieren mit $b=0,2,4$ liefert $a=3$ $b=4$

Also ist 21340 eine Lösung

Suche nach allen Lösungen:

kleinste Zahl, die alle Teilereigenschaften erfüllt

2, 3, 4, 10: 20 zusätzlich 5: 140

zusätzlich 11: $140 \cdot 11 = 1540$

addiert / subtrahiert man 1540 zur gefundenen Lösung 21340, erhält man weitere Zahlen mit den geforderten Teilbarkeitseigenschaften. Man verlässt aber das gegebene Intervall $\Rightarrow$ 21340 einzige Lösung